5 Limiti notevoli. Proprietà delle funzioni continue

5.1 Due limiti notevoli

Teorema 5.1. *Se gli angoli sono misurati in radianti, si ha*

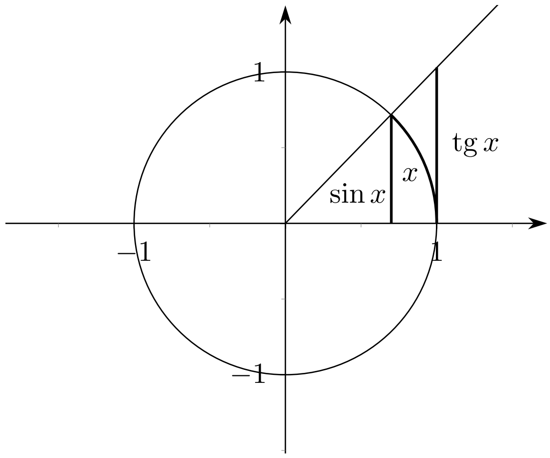
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,. \tag{5.1}$$

Dimostrazione. Osserviamo preventivamente che la funzione $f(x)={}^{\sin x}/_{x}$ ha come dominio naturale $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ed è una funzione pari. Basterà dunque provare che vale la (5.1) per $x\to 0^+$.

Per le note proprietà delle funzioni goniometriche si ha, per $0<x<{}^{\pi}/_{2}$,

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x\,, \tag{*}$$

come si può dedurre anche dal grafico che segue.



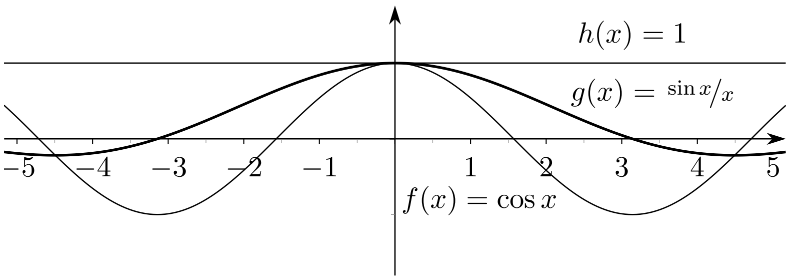
Se dividiamo la $(*)$ per $\sin x$ (sempre positivo e non nullo per $0<x<{}^{\pi}/_{2}$), otteniamo

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\quad\overset{(\#)}{\Rightarrow}\quad\cos x<\frac{\sin x}{x}<1\,,$$

ove il passaggio segnato con (#) è ottenuto prendendo i reciproci della doppia disuguaglianza precedente.

Per concludere basta ora applicare il teorema di confronto (Teorema 4.13, nella pagina 54), ricordando che la funzione coseno è continua e quindi ha limite 1 se $x\to 0$, che è lo stesso limite della funzione costantemente uguale a 1. □

Come sempre, è utile rendersi conto graficamente di come vanno le cose: nel grafico che segue sono rappresentate le tre funzioni che compaiono nell'ultima disuguaglianza.



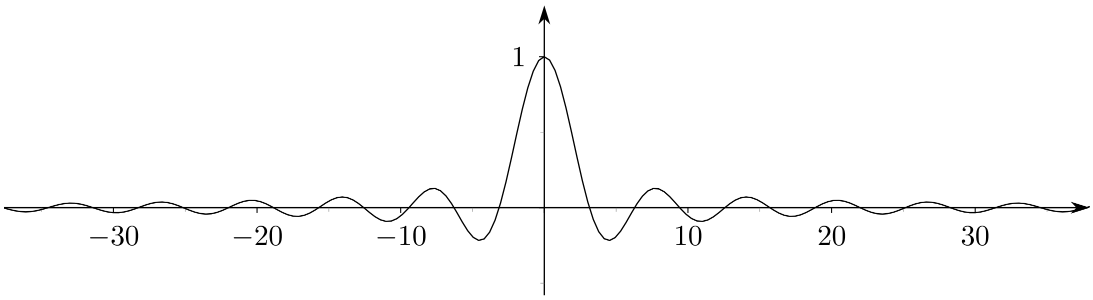
Si noti che, applicando uno dei teoremi sul limite del quoziente (vedi la pagina 56), si può concludere[1] che, invece,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0\,, \tag{5.2}$$

in quanto si può scrivere

$$\frac{\sin x}{x} = \sin x\,\frac{1}{x}\,,$$

ottenendo il prodotto tra una funzione limitata e una funzione che tende a 0. Anche di questo fatto è opportuno rendersi conto con un grafico.



Si tenga presente che il limite (5.1) vale *solo se gli angoli sono misurati in radianti.* Se si misurano gli angoli in gradi la disuguaglianza $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ deve essere sostituita dalla

$$\sin x^\circ < x^\circ\,\frac{\pi}{180} < \operatorname{tg} x^\circ\,,$$

come si ricava tenendo conto del legame tra la misura in gradi e in radianti di uno stesso angolo. Da qui segue che

$$\lim_{x^\circ\to 0^\circ} \frac{\sin x^\circ}{x^\circ} = \frac{\pi}{180}\,.$$

È proprio l'importanza che ha il limite (5.1) nelle applicazioni dell'analisi che fa propendere per l'uso dei radianti nella misura degli angoli. Studiando le derivate troveremo una interpretazione grafica significativa del perché ci sia questa differenza nel valore del limite a seconda del sistema di misura degli angoli.

Enunciamo ora, riservandoci di fornire successivamente la dimostrazione di almeno una parte, il seguente teorema.

[1] Si presti particolare attenzione a questo fatto: è un errore comunissimo pensare che il limite $\sin x/x$ sia sempre il limite notevole sopra considerato, mentre ciò è vero solo per $x \to 0$.

Teorema 5.2. *La funzione* $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$*, definita da*

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}, \tag{5.3}$$

ha limite finito per $x \to \pm\infty$ *e questo limite è un numero irrazionale (addirittura trascendente), strettamente compreso tra* 2 *e* 3*.*

Il valore di questo importantissimo limite si indica tradizionalmente con "e", e si chiama *Numero di Nepero*[2]. Si pone cioè

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}\,. \tag{5.4}$$

Per le applicazioni è importante conoscere un'approssimazione, almeno con alcuni decimali, del numero appena introdotto. Si ha

$$\mathrm{e} \simeq 2.71828\,.$$

Osservazione 5.3. Si noti che la funzione che abbiamo appena considerato è del tipo $(f(x))^{g(x)}$, vedi la (3.17) nella pagina 44, e che, come indicato sempre nella pagina 44, conviene scriverla, scegliendo un'opportuna base a, per esempio $a = 2 > 1$, nella forma

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = 2^{x\log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\,.$$

Con questa scrittura appare evidente la difficoltà nel calcolo del limite (5.4): l'esponente di 2 si presenta come il prodotto tra la funzione $g(x) = x$, che tende a $\pm\infty$, e la funzione $f(x) = (1 + 1/x)$ che tende a 0 (basta applicare il teorema sul limite delle funzioni composte e ricordare che la funzione $\log_2$ è continua). Siamo dunque in presenza di una *forma di indecisione*.

Segnaliamo anche che è opportuno utilizzare la tecnica qui proposta (trasformare una potenza con esponente e base entrambi variabili in una potenza con solo l'esponente variabile) in tutte le situazioni simili.

Osservazione 5.4. Il numero di Nepero, come è probabilmente già noto, gioca un ruolo fondamentale in matematica: è uno dei due irrazionali trascendenti[3] (l'altro è il π) di uso più comune.

Osservazione 5.5. Per motivi che saranno chiariti successivamente, il numero di Nepero è praticamente l'unico usato in matematica come base delle funzioni esponenziali e quindi delle funzioni logaritmo. Quando la base della funzione esponenziale è il numero e, spesso si dice semplicemente *funzione esponenziale* senza ulteriori precisazioni. Si pone cioè, di norma,

$$\exp(x) = \exp_{\mathrm{e}}(x) = \mathrm{e}^{x}\,. \tag{5.5}$$

[2] Questo numero si chiama anche *Numero di Eulero* ed è per questo motivo che si indica con "e". Eulero non ha bisogno di presentazioni, Nepero (John Napier) è il matematico scozzese che ha introdotto i logaritmi.

[3] Anche se non possiamo dilungarci sulla distinzione tra irrazionali trascendenti e irrazionali non trascendenti, è opportuno segnalare che gli irrazionali non trascendenti sono sempre soluzioni di equazioni razionali a coefficienti interi, quelli trascendenti no. In particolare sono non trascendenti tutti i numeri costruiti con le operazioni elementari a partire dai radicali.

Anche nel caso della funzione logaritmo in base e, si usa una nomenclatura speciale. Precisamente il logaritmo in base e è detto *logaritmo naturale* e indicato con "ln". Si pone cioè, di norma,

$$\ln(x) = \log_{\mathrm{e}}(x)\,. \tag{5.6}$$

In molte applicazioni ha comunque un interesse particolare anche il logaritmo in base 10: per esso si usa di norma la semplice scrittura "log", tralasciando l'indicazione della base. Purtroppo queste convenzioni non sono universali e molti usano "log" per il logaritmo naturale, e "Log" per il logaritmo in base 10. Si presti dunque la massima attenzione nella lettura dei testi, e nella risoluzione degli esercizi, alle convenzioni adottate[4].

5.2 Altri limiti importanti

5.2.1 Applicazioni dei limiti notevoli

Utilizzando i due limiti notevoli considerati, e applicando i teoremi sui limiti, si possono calcolare alcuni altri limiti di grande importanza. Le tecniche applicate nei calcoli che seguono sono standard in problemi di calcolo di limiti.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$

   Si ha infatti:

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1\times 1 = 1\,.$$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1.$

   Il calcolo di questo limite fornisce l'occasione per mostrare la tecnica del *cambiamento di variabile*, di frequentissima applicazione e basata sul teorema del limite delle funzioni composte. Posto $\arcsin x = t$, ovvero $x = \sin t$,, si trova che $t \to 0$ se $x \to 0$. Il limite precedente si può allora calcolare come segue

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1\,.$$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$

   Si procede esattamente come nell'esempio precedente con la sostituzione $\operatorname{arctg} x = t$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$

   Si ha:

   $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\frac{1}{1+\cos x} = 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

[4] Le convenzioni che abbiamo adottato in questi appunti sono quelle ufficiali della normativa ISO 31 − 11. Segnaliamo che questa convenzione è seguita da tutte le calcolatrici tascabili e dalla quasi totalità dei software di calcolo simbolico (eccezione importante è Mathematica, che comunque usa anche in molte altre circostanze notazioni proprie). Il motivo per cui questa normativa è spesso disattesa è legato al fatto che, in linea di principio, essa è rivolta ai fisici e agli ingegneri e non ai "matematici puri".

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$

   Si ha:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\lim_{y\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=\ln \mathrm{e}=1\,.$$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}.$

   Basta applicare al caso precedente la formula di cambiamento di base nei logaritmi.

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1.$

   Se si pone $\mathrm{e}^x-1=t$, si trova $x=\ln(1+t)$ e inoltre se $x\to 0$, allora $t\to 0$. La conclusione segue ora immediatamente dal limite numero 5.

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$

   Si ha
$$\frac{a^x-1}{x}=\ln a\frac{\mathrm{e}^{x\ln a}-1}{x\ln a}=\ln a\,\frac{\mathrm{e}^t-1}{t}\,,$$
   dopodiché la conclusione è immediata.

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$

   Si ha
$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\frac{\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\,\alpha\,\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{\mathrm{e}^t-1}{t}\,\alpha\,\frac{\ln(1+x)}{x}\,,$$
   dopodiché la conclusione è immediata.

I limiti 5, 6, 7, 8 costituiscono una giustificazione (che diventerà ancora più palese studiando le derivate) del perché la base dei logaritmi e delle funzioni esponenziali è normalmente 1.

5.2.2 Altri limiti relativi ad esponenziali e logaritmi

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$

   Si comincia con l'osservare che, per ogni $x>0$, si ha $\ln x<x$. Infatti se $0<x<1$ $\ln x<0$ e quindi $\ln x<x$; poi, per ogni $n\in\mathbb{N}$, se $\mathrm{e}^n\le x\le \mathrm{e}^{n+1}$, si ha $n\le\ln x\le n+1$ e dunque, ancora, $\ln x<x$. Si ha poi:
$$\ln x<x\Rightarrow \ln\sqrt{x}<\sqrt{x}\Rightarrow\frac{1}{2}\ln x<\sqrt{x}\Rightarrow \ln x<2\sqrt{x}\,.$$
   Se dividiamo per x ambo i membri dell'ultima uguaglianza e osserviamo che, per $x>1$, $\ln x>0$, otteniamo
$$0<\frac{\ln x}{x}<2\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{2}{\sqrt{x}}\,.$$
   Poiché l'ultimo membro tende a zero, per il teorema del confronto possiamo concludere nel senso richiesto.

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0.$

   Basta solo operare un cambiamento di base nel logaritmo per ricondursi al caso precedente:

   $$\frac{\log_a x}{x} = \frac{1}{\ln a}\frac{\ln x}{x}.$$

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0,\ p \in \mathbb{R}^+.$

   Si ha

   $$\frac{\log_a x}{x^p} = \frac{1}{p}\frac{\log_a x^p}{x^p},$$

   da cui segue il risultato voluto.

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^p \log_a x = 0,\ p \in \mathbb{R}^+.$

   Si opera il cambiamento di variabile $x = 1/t$, osservando che se $x \to 0^+$, allora $t \to +\infty$.

   $$x^p \log_a x = \frac{1}{t^p}\log_a \frac{1}{t} = -\frac{\log_a t}{t^p},$$

   da cui segue il risultato voluto.

5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty,\ a > 1.$

   Si pone $a^x = t$, da cui $x = \log_a t$ e se $x \to +\infty$, anche $t \to +\infty$.

   $$\frac{a^x}{x} = \frac{t}{\log_a t}.$$

   Questo permette di concludere osservando che si tratta del reciproco del limite numero 2.

6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty,\ a > 1 \land p > 0$

   Si può osservare che

   $$\frac{a^x}{x^p} = \left(\frac{(a^{1/p})^x}{x}\right)^p = \left(\frac{b^x}{x}\right)^p,$$

   da cui si conclude.

5.3 I teoremi fondamentali sulle funzioni continue

Teorema 5.6 (Zeri di una funzione continua)**.** *Sia $f\colon [a_0, b_0] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, tale che*

$$f(a_0) \cdot f(b_0) < 0,$$

cioè tale che $f(a_0)$ e $f(b_0)$ abbiano segno opposto.

Allora esiste almeno un punto c di $[a_0, b_0]$ tale che $f(c) = 0$.

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sul teorema di Cantor. Si considera il punto medio, m_0, di $[a_0, b_0]$: se $f(m_0) = 0$ abbiamo finito, se invece $f(m_0) \neq 0$, si considera l'intervallo $[a_1, b_1] = [a_0, m_0]$ se $f(a_0) \cdot f(m_0) < 0$, altrimenti $[a_1, b_1] = [m_0, b_0]$: si avrà in ogni caso $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$. Ripetendo il discorso su $[a_1, b_1]$, o si conclude con un punto c come richiesto o si procede. Dunque o si trova a un certo punto un c adatto e si conclude, o si ottiene una successione di intervalli inscatolati la cui ampiezza tende a 0. In questo secondo caso, sia c l'unico punto comune a tutti gli intervalli. Vogliamo provare che $f(c) = 0$. Se per caso fosse $f(c) \neq 0$, per il teorema della permanenza del segno esisterebbe un intorno di c dove f è diversa da 0. Ma ciò non può essere in quanto in questo intorno di c deve essere contenuto almeno uno degli intervalli precedentemente costruiti (in quanto la loro ampiezza tende a 0), e sugli estremi di questo intervallo la f ha valori di segno opposto. □

Il metodo usato in questa dimostrazione si chiama anche *metodo di bisezione* ed è anche un metodo pratico per trovare una approssimazione di uno zero, nel caso non sia possibile trovarlo con i metodi tradizionali dell'algebra.

Segnaliamo che, anche in casi semplici, è possibile che "occorrano tutti i passi" della dimostrazione, cioè che non si concluda in un numero finito di passi: basta considerare la funzione $f(x) = x^2 - 2$, nell'intervallo $[0, 2]$. Si ha $f(0) = -2$ e $f(2) = 2$: siamo dunque nelle condizioni di applicare il teorema, ma non potremo mai trovare la radice tra punti che si ottengono dividendo successivamente a metà gli intervalli via via costruiti, perché tutti questi punti sono razionali, mentre l'unico zero della funzione in $[0, 2]$ è $\sqrt{2}$ che è irrazionale.

Il teorema vale anche se l'intervallo di definizione della funzione non è chiuso oppure non è limitato. Basta sostituire i valori $f(a_0)$ e $f(b_0)$ con i limiti da destra, sinistra, o all'infinito. La dimostrazione di questa "estensione" del teorema è una conseguenza del teorema di permanenza del segno e del teorema degli zeri che abbiamo provato. I volenterosi possono farla come utile esercizio.

Teorema 5.7 (Di connessione, o "Di tutti i valori", o "Dei valori intermedi")**.** *Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, $f\colon [a_0, b_0] \to \mathbb{R}$. Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Dimostrazione. Se $f(a) = f(b)$ non c'è nulla da provare, altrimenti basta prendere un γ tra $f(a)$ e $f(b)$ e applicare il teorema degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) - \gamma$. □

Presi due punti c e d arbitrariamente tra a e b, il teorema si può applicare anche all'intervallo $[c, d]$: se ne deduce che la funzione assume tutti i valori compresi tra due suoi valori qualunque. Per questo si chiama "teorema di tutti i valori".

Enunciamo ora, senza dimostrarlo, l'ultimo dei teoremi che ci interessano relativamente alle funzioni continue.

Teorema 5.8 (Di Weierstrass)**.** *Se una funzione f è continua in un insieme A* chiuso e limitato*, allora assume massimo e minimo, cioè esistono un punto c e un punto d di A tali che $f(c)$ sia il massimo e $f(d)$ il minimo dell'insieme immagine della funzione.*

5.4 La continuità uniforme (cenni)

Riesaminiamo la definizione di continuità per una funzione, in un punto non isolato del dominio:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Questo significa che

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ esiste } \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \text{ con } |x - x_0| < \delta \text{ si abbia } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Detto in altri termini,

"punti sufficientemente vicini a x_0 hanno immagini vicine quanto si vuole a $f(x_0)$".

Ci possiamo chiedere: da qui è per caso possibile dedurre che "punti vicini tra di loro hanno immagini vicine tra di loro"? Purtroppo la risposta è negativa, come mostra l'esempio della funzione $f(x) = x^2$. Se prendiamo un $\delta > 0$ e consideriamo i punti $x_1 = 1/\delta$ e $x_2 = 1/\delta + \delta/2$, la loro distanza è $\delta/2$, e può essere resa piccola quanto si vuole pur di prendere δ abbastanza piccolo. La distanza tra $f(x_1) = x_1^2$ e $f(x_2) = x_2^2$ è data da $1 + \delta^2/4$ e dunque è sempre maggiore di 1, cioè questa distanza non può essere resa arbitrariamente piccola.

Si dà allora la seguente definizione.

Definizione 5.9. *Una funzione* $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dice* uniformemente continua *se, fissato* $\varepsilon > 0$ *è possibile in corrispondenza trovare un* $\delta > 0$*, tale che, per ogni coppia di punti* x_1 *e* x_2 *con* $|x_1 - x_2| < \delta$*, si abbia* $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$*.*

È evidente che una funzione uniformemente continua è anche continua, cioè che il concetto di continuità uniforme è più restrittivo che non quello di continuità, tuttavia l'esempio precedente mostra che non è vero il viceversa. Per la funzione $f(x) = x^2$, se fisso un $\varepsilon < 1$, non potrò mai trovare un δ che soddisfi alle richieste: qualunque sia δ trovo sempre due punti come quelli considerati che hanno distanza minore di δ e con la distanza delle immagini maggiore di ε. Si osservi che questa caratteristica è intuitivamente evidente per la funzione $f(x) = x^2$. La cosa può essere espressa, con linguaggio significativo anche se poco rigoroso, nel seguente modo: se prendo una coppia di punti "molto lontani dallo 0", anche se vicinissimi tra di loro, la distanza delle immagini potrà anche essere "grande", in quanto il grafico della funzione tende a essere "molto verticale" per x molto grandi.

Vale comunque il seguente importante teorema, di cui ci limitiamo a dare l'enunciato.

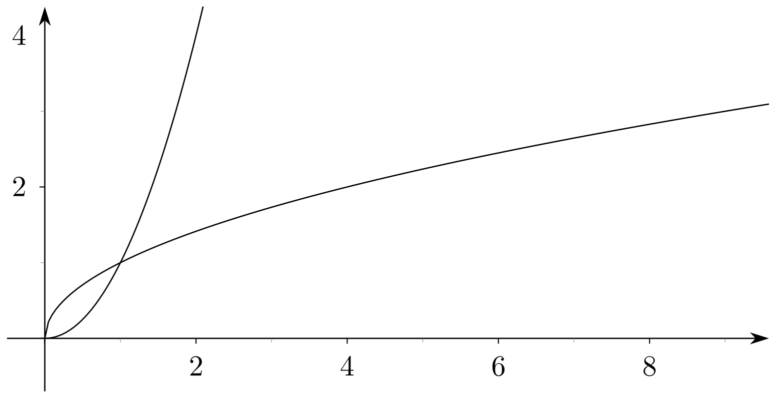
Teorema 5.10 (Di Heine)**.** *Ogni funzione continua e definita in un insieme chiuso e limitato è uniformemente continua.*

Si badi bene che questo teorema esprime solo una condizione sufficiente: anche funzioni continue definite in insiemi non chiusi o non limitati possono essere uniformemente continue. un esempio è fornito dalla funzione $f(x) = \sqrt{x}$, nell'intervallo $[1, +\infty[$. Dati infatti due punti x_1 e x_2, entrambi maggiori di 1, si ha:

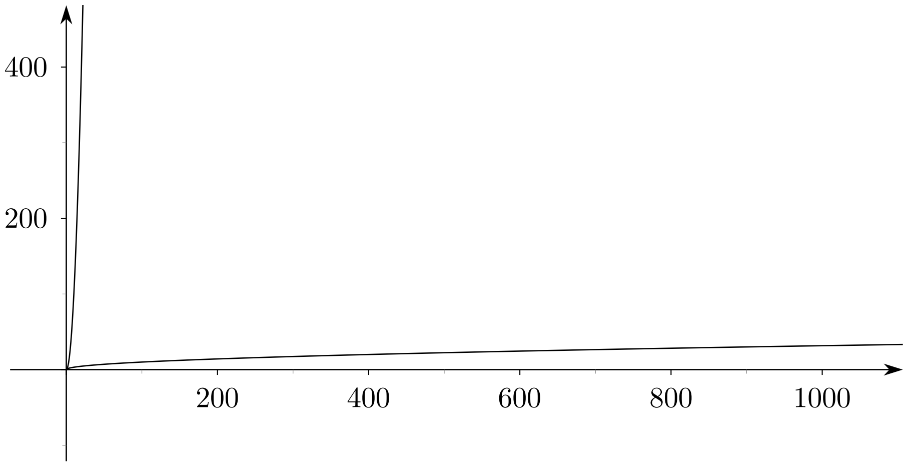
$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} < \frac{|x_1 - x_2|}{2}\,.$$

Se si prende $\delta = 2\varepsilon$ si ha subito che quando i due punti x_1 e x_2 distano meno di δ, le loro immagini distano meno di ε.

Si noti anche che la differenza con la funzione x^2 sopra considerata è costituita dal fatto che. mentre x^2 diventa "molto verticale" per x grandi, la funzione $\sqrt{x}$ rimane invece sempre "abbastanza piatta" anche per x grandi. Si vedano i due grafici, già comunque altre volte considerati.



La cosa diventa particolarmente evidente usando una scala opportuna che mostri le parti di grafico "lontane dall'origine".



Non insistiamo oltre su questo pur importante concetto, segnalando comunque che ne faremo uso nella teoria dell'integrazione delle funzioni continue.