Infinitesimi e loro proprietà fondamentali

Definizione
Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno del punto $x = x_0$, tranne eventualmente nel punto $x = x_0$
Si dice che $\boldsymbol{f(x)}$ è un **infinitesimo** per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

In modo analogo $\boldsymbol{f(x)}$ è un **infinitesimo** per $x \to +\infty$, oppure per $x \to -\infty$ se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

<u>Esempi</u>

1 – $f(x) = (x-3)^2$ è un infinitesimo per $x \to 3$ perché

$$\lim_{x \to 3} (x-3)^2 = 0$$

2 – $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è un infinitesimo per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ perché

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Usiamo la scrittura $x \to c$ per indicare sia $x \to x_0$ che $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

Confronto fra infinitesimi

Dati due infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$ per $x \to c$, si considera il rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Definizioni
Se

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0 \qquad L \in \mathbf{R}$$

le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono **infinitesimi dello stesso ordine** per $x \to c$.
Se

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

la funzione **$\boldsymbol{f(x)}$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\boldsymbol{g(x)}$** per $x \to c$.
Se

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

la funzione **$\boldsymbol{f(x)}$ è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a $\boldsymbol{g(x)}$** per $x \to c$.
Se

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{non esiste}$$

le funzioni **$\boldsymbol{f(x)}$ e $\boldsymbol{g(x)}$ sono infinitesimi non confrontabili** per $x \to c$.

<u>Esempi</u>

1 – $f(x) = 1 - \cos x \qquad g(x) = x^2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ e } g(x) \text{ sono infinitesimi dello stesso ordine per } x \to 0.$$

2 – $f(x)=\sqrt{x}-2$ $\qquad g(x)=x-4$

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\dfrac{1}{4}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x\to 4$.

3 – $f(x)=1-\cos x$ $\qquad g(x)=\sin x$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\dfrac{x^2}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\dfrac{x}{\sin x}x=0$ $\quad\Rightarrow\quad$ $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$ per $x\to 0$.

4 – $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ $\qquad g(x)=\dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x^3}=0$ $\quad\Rightarrow\quad$ $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$ per $x\to +\infty$.

5 – $f(x)=\ln(x+1)$ $\qquad g(x)=x^3$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}\cdot\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ $\quad\Rightarrow\quad$ $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a $g(x)$ per $x\to 0$.

6 – $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ $\qquad g(x)=x$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ non esiste $\quad\Rightarrow\quad$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi non confrontabili per $x\to 0$.

Infinitesimi equivalenti
Definizione
Se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi per $x\to c$ e se risulta

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infinitesimi equivalenti** per $x\to c$ e si scrive

$$f(x)\sim g(x)\qquad \text{per } x\to c.$$

Esempi

1 – $f(x)=x$ $\qquad g(x)=x^3+x$ $\qquad$ sono equivalenti per $x\to 0$ perchè

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x^2+1)}=1$$

2 – $f(x)=\sin x$ $\qquad g(x)=x$ $\qquad$ sono equivalenti per $x\to 0$ perchè

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

3 – $f(x)=e^x-1$ $g(x)=x$ sono equivalenti per $x\to 0$ perchè

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

4 – $f(x)=ln(x+1)$ $g(x)=x$ sono equivalenti per $x\to 0$ perchè

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1$$

Nella seguente tabella sono riassunti alcuni casi importanti di infinitesimi equivalenti

Tabella di infinitesimi equivalenti.
(A destra sono indicati i limiti fondamentali utilizzati per scrivere l'equivalenza).

1 –	$\sin x \sim x$	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
2 –	$tgx \sim x$	$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$
3 –	$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$	$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$
4 –	$ln(1+x) \sim x$	$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1$
5 –	$e^x-1 \sim x$	$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

Principio di sostituzione degli infinitesimi

Se il rapporto di due infinitesimi ammette limite per $x\to c$, tale limite resta invariato se si sostituisce ciascuno dei due infinitesimi con un infinitesimo equivalente, ossia:

$$\left.\begin{array}{ll} f(x),\ f_1(x),\ g(x),\ g_1(x) & \text{infinitesimi per } x\to c \\ f(x)\sim f_1(x) & \text{per } x\to c \\ g(x)\sim g_1(x) & \text{per } x\to c \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Esempi

1 – $$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{2tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

perché $ln(1+x)\sim x$ $tgx\sim x$

2 – $$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+4x)}{2tg(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2\cdot 3x}=\frac{2}{3}$$

perché $ln(1+4x)\sim 4x$ $tg3x\sim 3x$

3 – $$\lim_{x\to 0}\frac{sin(2x)}{tg(5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$$

perché $sin(2x)\sim 2x$ $tg5x\sim 5x$

4 – $$\lim_{x\to 0}\frac{sin(7x)}{ln(1+3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{3x}=\frac{7}{3}$$

perché $sin(7x)\sim 7x$ $ln(1+3x)\sim 3x$

5 – $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{8}x^2}=4$$

perché $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2 \qquad 1-\cos\frac{x}{2}\sim\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{8}x^2$

6 – $$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x+2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$$

7 – $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

Principio di eliminazione degli infinitesimi

Se le funzioni $f(x)$, $f_1(x)$, $g(x)$, $g_1(x)$ sono infinitesimi per $x\to c$ e se

$f_1(x)$ è di ordine superiore rispetto a $f(x)$ per $x\to c$

$g_1(x)$ è di ordine superiore rispetto a $g(x)$ per $x\to c$

allora

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$$

In altre parole il limite del rapporto fra due infinitesimi non cambia aggiungendo o togliendo agli infinitesimi dati degli infinitesimi di ordine <u>superiore</u>.

<u>Esempi</u>

1 – $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+3x^4}{\sin^2 x+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

perché $\sin x\sim x$ e $\sin^2 x\sim x^2$

2 – $$\lim_{x\to 0}\frac{tg(2x)+5x^3}{\sin x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$$

3 – $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x}{\sin x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0$$

Infiniti e loro proprietà fondamentali

Definizione
Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno del punto $x = x_0$, tranne eventualmente nel punto $x = x_0$
Si dice che $\boldsymbol{f(x)}$ è un **infinito** per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$$

In modo analogo $\boldsymbol{f(x)}$ è un **infinito** per $x \to +\infty$, oppure per $x \to -\infty$ se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$$

Esempi

1 – $f(x) = 3x^2$ è un infinito per $x \to \pm\infty$ perché $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 3x^2 = +\infty$

2 – $f(x) = ln\, x$ è un infinito per $x \to +\infty$ perché $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\, x = +\infty$

3 – $f(x) = ln\, x$ è un infinito per $x \to 0^+$ perché $\lim\limits_{x\to 0^+} ln\, x = -\infty$

4 – $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è un infinito per $x \to 0$ perché $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

Usiamo la scrittura $x \to c$ per indicare sia $x \to x_0$ che $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

Confronto fra infiniti

Dati due infiniti $f(x)$ e $g(x)$ per $x \to c$, si considera il rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Definizioni
Se

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0 \qquad L \in \mathbf{R},$$

le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono **infiniti dello stesso ordine** per $x \to c$.
Se

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

la funzione $\boldsymbol{f(x)}$ **è un infinito di ordine inferiore rispetto a** $\boldsymbol{g(x)}$ per $x \to c$.
Se

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

la funzione $\boldsymbol{f(x)}$ **è un infinito di ordine superiore rispetto a** $\boldsymbol{g(x)}$ per $x \to c$.
Se

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{non esiste}$$

le funzioni $\boldsymbol{f(x)}$ **e** $\boldsymbol{g(x)}$ **sono infiniti non confrontabili** per $x \to c$.

Esempi

1 – $f(x) = x^2 - 2$ $\qquad g(x) = 3x^2 - x$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2}{3x^2-x} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ e } g(x) \text{ sono infiniti dello stesso ordine per } x \to \pm\infty.$$

2 – $f(x)=\dfrac{1}{x^3-1}$ $\qquad g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

$$\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{1}{x^3-1}}{\dfrac{1}{x^2-1}}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{2}{3}$$ $\Rightarrow$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti dello stesso ordine per $x\to1$

3 – $f(x)=x^2-1$ $\qquad g(x)=x^3-1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^3-1}=0$$ $\Rightarrow$ $f(x)$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a $g(x)$ per $x\to+\infty$

4 – $f(x)=x^3-4x+1$ $\qquad g(x)=x^2+x-1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4x+1}{x^2+x-1}=+\infty$$ $\Rightarrow$ $f(x)$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $g(x)$ per $x\to+\infty$

5 – $f(x)=(x+1)\sin x$ $\qquad g(x)=x+1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\sin x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\sin x$$ non esiste $\Rightarrow f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti non confrontabili per $x\to 0$

Osservazione importante

La “rapidità con la quale una funzione $f(x)$ tende all'infinito, per x tendente all'infinito, varia a seconda delle sue caratteristiche. In linea generale, per x tendente all'infinito, possiamo dire che:

- un polinomio di grado n cresce in valore assoluto più rapidamente di qualunque polinomio di grado $n-1$.
- una funzione esponenziale $y=a^x$, con $a>1$, cresce più rapidamente di qualsiasi polinomio.
- una funzione logaritmica $y=\log_a x$, con $a>1$, cresce meno rapidamente di qualsiasi polinomio.

Queste ultime due importanti proprietà sono basate sui seguenti limiti fondamentali (che possono essere generalizzati a una qualunque base $a>1$); tali limiti potranno essere facilmente dimostrati con la regola di De l'Hopital, che verrà in seguito enunciata.

Limiti fondamentali

Si dimostra che la funzione e^x è un infinito di ordine superiore a ogni potenza di x, per $x\to+\infty$, ossia

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \qquad \text{qualunque sia } n>0$$

Si dimostra che la funzione $\ln x$ è un infinito di ordine inferiore a ogni potenza di x, per $x\to+\infty$, ossia

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0 \qquad \text{qualunque sia } n>0$$

Principio di eliminazione degli infiniti
Se le funzioni $f(x)$, $f_1(x)$, $g(x)$, $g_1(x)$ sono infiniti per $x \to c$ e se

$f_1(x)$ è di ordine inferiore rispetto a $f(x)$ per $x \to c$

$g_1(x)$ è di ordine inferiore rispetto a $g(x)$ per $x \to c$

allora

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

In altre parole il limite del rapporto fra due infiniti non cambia aggiungendo o togliendo agli infiniti dati degli infiniti di ordine <u>inferiore</u>.

Questi risultati rendono spesso più agevole il calcolo dei limiti, come mostrano i seguenti esempi.
<u>Esempi</u>

1 – $$\lim_{x \to +\infty} \frac{3+x+x^2}{x^4+x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^4} = 0$$

2 – $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3+\sqrt{x^2+1}}{x^3+\sqrt[3]{x^5}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

perché $f_1(x) = \sqrt{x^2+1}$ è un infinito di ordine inferiore a $f(x) = 2x^3$ per $x \to +\infty$

$g_1(x) = \sqrt[3]{x^5}$ è un infinito di ordine inferiore a $g(x) = x^3$ per $x \to +\infty$

3 – $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2+2} = +\infty$$ (limite fondamentale)

4 – $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2-2} = 0$$ (limite fondamentale)

5 – $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2-3x+5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$ (principio di eliminazione e limite fondamentale)

6 – $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}+x^2+\ln x}{x^3+e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$ (principio di eliminazione e limite fondamentale)

Esercizi

1) Stabilire quali delle seguenti funzioni sono degli infinitesimi per $x \to 2$

a – $f(x) = (x-2)^2$

b – $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^2-4}$

c – $f(x) = x^2 - x - 2$

d – $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$

2) Stabilire per x tendente a quale valore ciascuna delle funzioni seguenti risulta essere un infinitesimo

a – $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b – $f(x) = \dfrac{x+4}{x-3}$

c – $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$

d – $f(x) = \ln x$

e – $f(x) = 3x + 2$

3) Per le seguenti coppie di infinitesimi stabilire qual è l'infinitesimo di ordine superiore

a – $f(x) = x^2 - 9$ $\quad g(x) = x^2 - 6x + 9$ $\quad$ per $x \to 3$

b – $f(x) = 1 - \cos x$ $\quad g(x) = \sin(x^2)$ $\quad$ per $x \to 0$

4) Scrivere due funzioni che siano infinitesime per $x \to -1$ e per $x \to 4$.

5) Scrivere due funzioni che siano infinitesime per $x \to +\infty$

6) Stabilire quali delle seguenti funzioni sono degli infiniti per $x \to 5$

a – $f(x) = \dfrac{5}{x}$

b – $f(x) = \ln(x-5)$

c – $f(x) = x^2 - 25$

d – $f(x) = \dfrac{1}{5-x}$

7) Stabilire quali delle seguenti funzioni sono degli infiniti per $x \to +\infty$ e/o per per $x \to -\infty$

a – $f(x) = \dfrac{1}{5-x}$

b – $f(x) = \ln(x-5)$

c – $f(x) = x^2 - 25$

d – $f(x) = \dfrac{x^2}{3+x}$

e – $f(x) = le^x - 1$

8) Per le seguenti coppie di infiniti stabilire qual è l'infinito di ordine superiore

a – $f(x) = x^2 - 9$ $\quad g(x) = x^4 - 6x + 9$ $\quad$ per $x \to \pm\infty$

b – $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ per $x \to 0$

9) Scrivere due funzioni che siano infinite per $x \to -2$ e per $x \to 4$.

10) Scrivere due funzioni che siano infinite per $x \to +\infty$