LIMITI NOTEVOLI

$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$ dimostrazione1	$\lim_{x\to x_0}\frac{sen(f(x))}{f(x)}=1$ con $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ dimostrazione 2	
$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$	
$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$	$\lim_{x\to x_0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e$ con $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$
$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$ dimostrazione 3	
$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\lim_{x\to x_0}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}=1$ con $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$
$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ dimostrazione 4	
$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$	$\lim_{x\to x_0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1$ con $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$

Dimostrazione 1

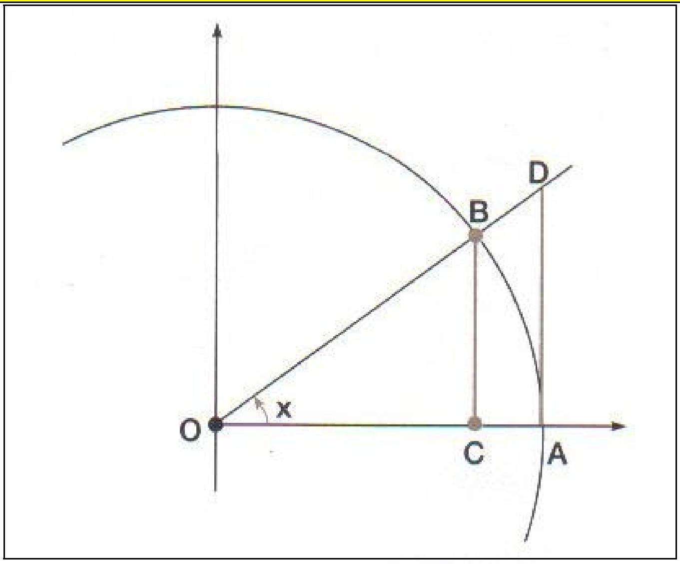

Fig. 1

Consideriamo (fig. 1) la circonferenza goniometrica il cui raggio è l'unità di misura e sia x la misura in radianti dell'angolo $\widehat{AOB}$.
Sappiamo che la misura di CB rispetto al raggio è $sen\ x$ e quella di AD è $tg\ x$.
Osservando ancora la figura 1 si deduce, come si potrebbe facilmente dimostrare, che è

$$CB < \widehat{AB} < AD$$

e, passando alle rispettive misure rispetto al raggio unitario, si ha così

$$sen\ x < x < tg\ x.$$

Da qui, dividendo per $sen\ x$(che è positivo nelle ipotesi fatte), si ottiene:

$$1 < \frac{x}{sen\ x} < \frac{1}{cos\ x},$$

oppure, considerando gli inversi,

$$1 > \frac{sen\ x}{x} > cos\ x.$$

Pertanto, avendosi

$$cos\ x < \frac{sen\ x}{x} < 1,$$

i valori della funzione $\frac{sen\ x}{x}$ sono compresi tra quelli della funzione $cos\ x$ che tende a 1 per $x \to 0^+$ ed il valore costante 1. Quindi, in base al teorema del confronto possiamo concludere che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{sen\ x}{x} = 1.$$

Essendo f una funzione pari, si ha poi anche

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{sen\ x}{x} = 1.$$

Si conclude così che sussiste il limite (1) **c.v.d.**

Torna a limiti notevoli

dimostrazione 2

Si considera

$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =$ si moltiplicano numeratore e denominatore per $(1+\cos x)$, per cui

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)}{x^2} \cdot \frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{sen^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1}{(1+\cos x)} = \frac{1}{2} \quad \textbf{c.v.d.}$$

dimostrazione 3

Si considera

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \Rightarrow \lim_{x \to 0} \log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e$$

per la proprietà dei logaritmi $\log a^n = n \log a$ si può scrivere

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log_a (1+x) = \log_a e \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e \quad \textbf{c.v.d.}$$

caso particolare

se $a = e$ si ottiene $\lim_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$

Torna a limiti notevoli

dimostrazione 4

Si considera

$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} =$ e si applica la sostituzione $a^x - 1 = t$, da cui si ricava $a^x = t + 1 \Rightarrow x = \log_a (t+1)$.

Da $a^x - 1 = t$ si ricava inoltre che se x tende a 0 anche t tende a 0, per cui il limite di partenza diventa:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\log_a (t+1)} = \frac{1}{\log_a e},$$

ma per il teorema del cambiamento di base $\frac{1}{\log_a e} = \ln a$, quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \textbf{c.v.d.}$$

caso particolare

se $a = e$ si ottiene $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1$

Torna a limiti notevoli