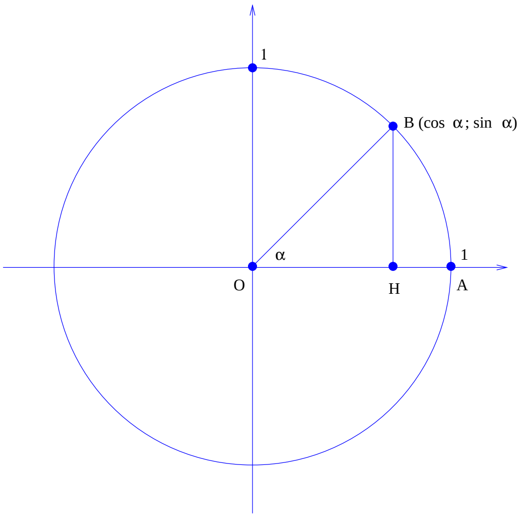
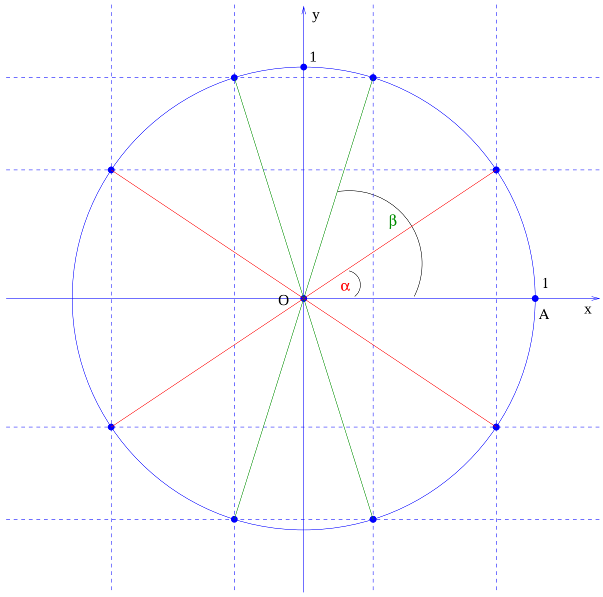
Funzioni trigonometriche

Il cerchio trigonometrico

Consideriamo in un piano cartesiano la circonferenza con il centro nell'origine e avente per raggio il segmento che è stato fissato come unità di misura per i due assi (raggio=1). Sia dato un angolo α con il centro in O e il suo primo lato con il semiasse positivo delle ascisse (cioè l'angolo è "appoggiato" al lato positivo dell'asse delle x); viene considerato positivo un angolo in senso antiorario e negativo in senso orario. Sarà chiamato B il punto sulla circonferenza che è associato all'angolo α, e H il punto della proiezione di B sull'asse delle x.





A questo punto rispolveriamo le definizioni di seno, coseno e tangente

Seno

Il seno per definizione è la lunghezza del cateto opposto fratto l'ipotenusa. Essendo l'ipotenusa pari a 1 sul cerchio trigonometrico. Il seno è semplicemente la lunghezza del segmento $\overline{\mathrm{HB}}$.

Coseno

Il seno è il rapporto tra il cateto adiacente e l'ipotenusa. Quindi nel nostro caso corrisponde alla lunghezza del segmento $\overline{\mathrm{OH}}$.

Tangente

La tangente invece è un po' più complessa. Per definizione corrsponde al rapporto tra il cateto opposto e quello adiacente e nel nostro caso sarà $\frac{\overline{\mathrm{HB}}}{\overline{\mathrm{OH}}}$.

Le funzioni trigonometriche

Vediamo come variano seno coseno e tangente al variare dell'angolo α utilizzando il cerchio trigonometrico.

Il seno

Il seno, essendo la lunghezza $\overline{\mathrm{HB}}$ ad un angolo pari a 0 sarà 0 e crescerà fino a raggiungere il valore massimo di 1 per 90° e poi ridiscenderà a 0 per 180°. Dopo i 180 gradi si avranno dei valori negativi con il minimo a 270° (-1) per tornare a 0 a 360°. Da qui in avanti si ripeteranno gli stessi valori, cioè sin $(360 + \alpha)$ = sin (α); il seno è pertanto una funzione periodica. Guardando gli angoli negativi si osserva inoltre che $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$.

Riassumendo:

$\sin(360+\alpha) = \sin(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\sin(180-\alpha) = \sin(\alpha)$	$\sin(180+\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\sin(360-\alpha) = -\sin(\alpha)$	

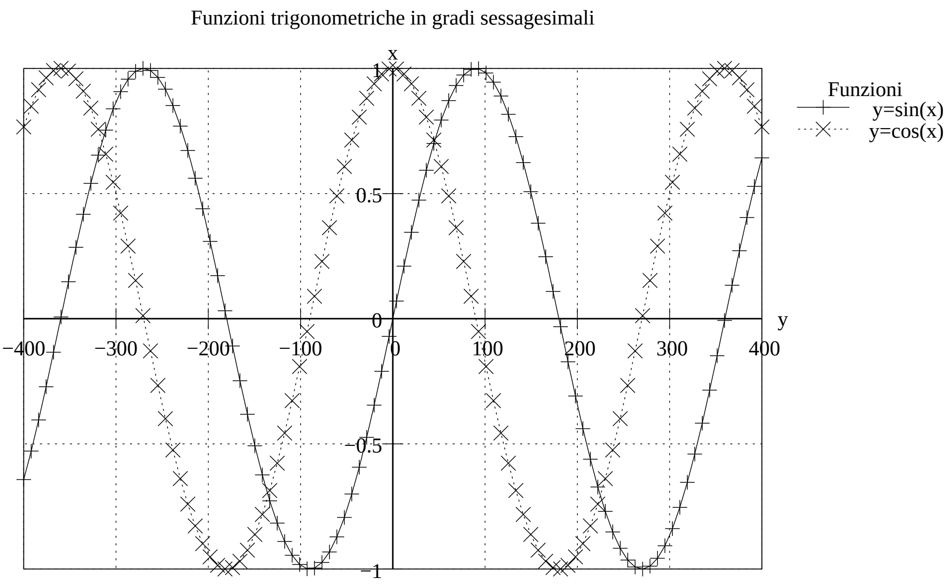
Il coseno

Il coseno invece a 0 gradi avrà valore di 1 per scendere gradualmente a 0 a 90°. Oltre i 90° si avranno valori negativi con il minimo a 180° (-1). Poi il valore aumento di nuovo, tocca lo 0 a 270° e raggiunge di nuovo 1 a 360°. Nuovamente da qui in avanti si ripeteranno gli stessi valori, cioè $\cos(360+\alpha) = \cos(\alpha)$. Inoltre si osserva come $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

Riassumendo:

$\cos(360+\alpha) = \cos(\alpha)$	$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\cos(180-\alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos(180+\alpha) = -\cos(\alpha)$
$\cos(360-\alpha) = -\cos(\alpha)$	

I grafici delle funzioni seno e coseno



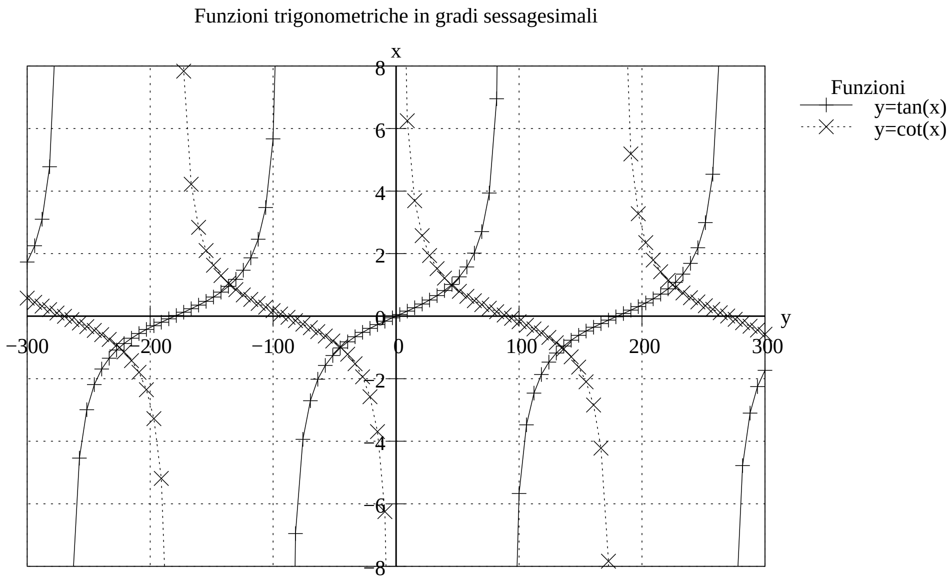
La tangente

La tangente è anch'essa una funzione periodica. Per capire il suo andamento dobbiamo analizzare il rapporto tra il cateto opposto e il cateto adiacente. A 0° il cateto opposto è pari a 0 e quindi la tangente sarà 0. A 45° i due cateti avranno la stessa lunghezza e quindi il valore della tangente sarà 1. A 90° il cateto opposto è lungo 1 mentre quello adiacente è lungo 0 e quindi si ha il valore $+\infty$. Oltre i 90° i valori saranno negativi (il cateto adiacente ha valore negativo) e da $-\infty$ arriveranno a 0 per 180°. Oltre i 180° diventeranno nuovamente positivi per raggiungere il $+\infty$ a 270°. Oltre salterà nuovamente a $-\infty$ per tornare a 0 a 360°. In questo caso si ha quindi una periodicità di 180°, cioè tan $(180 + \alpha)$ = tan (α). Inoltre sussiste anche la relazione $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$.

Riassumendo:

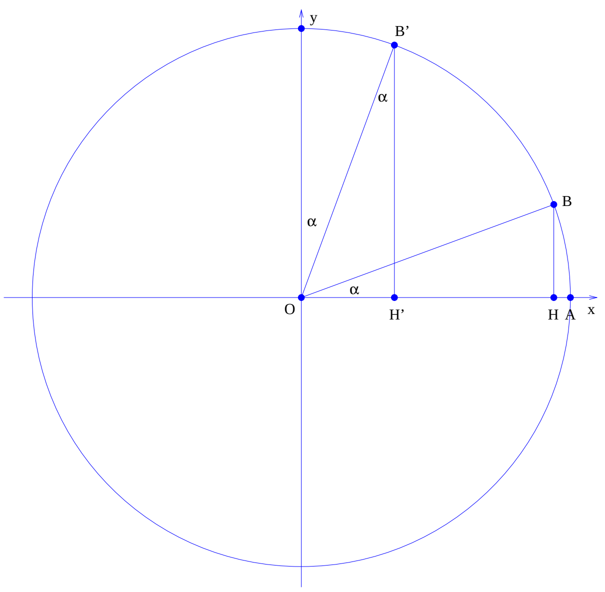
$\tan(180+\alpha)=\tan(\alpha)$	$\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)$
$\tan(180-\alpha)=-\tan(\alpha)$	$\tan(180+\alpha)=\tan(\alpha)$
$\tan(360-\alpha)=-\tan(\alpha)$	

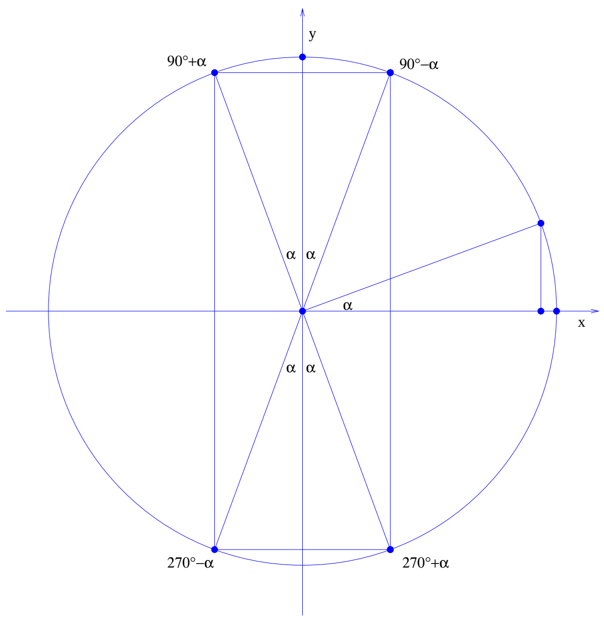
Grafici di tangente e cotangente



Angoli complementari

Oltre a quanti già visto, si possono dedurre una serie di altre relazioni, alcune delle quali già note. Tutte queste relazioni nascono dall'osservazione degli angoli complementari a 90°. Provate a controllare le relazioni scritte nella sottostante tabella usando i due schizzi qui sotto rappresentati.



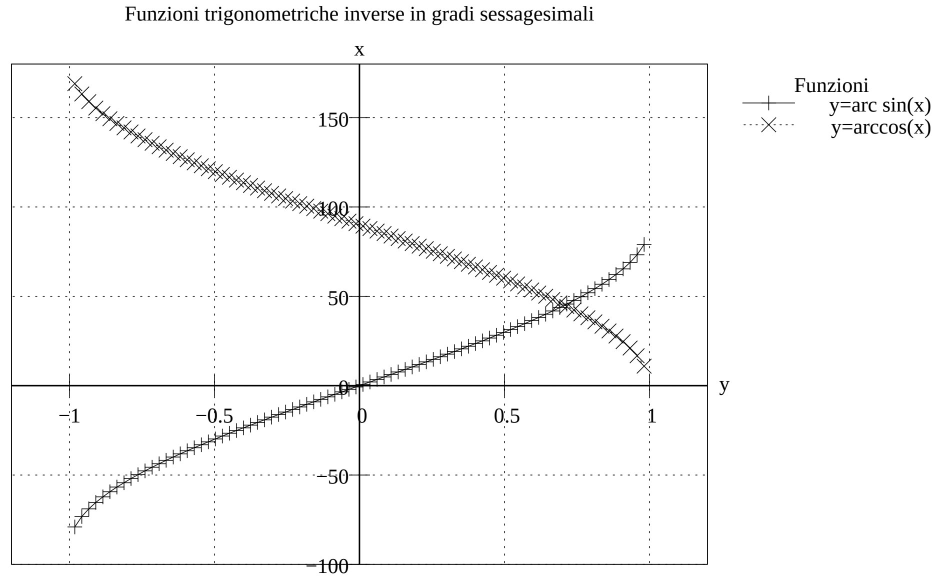


$\sin(\alpha) = \cos(90 - \alpha)$	$\sin(90 + \alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(270 - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(270 + \alpha) = -\cos(\alpha)$
$\cos(\alpha) = \sin(90 - \alpha)$	$\cos(90 + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\cos(270 - \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\cos(270 + \alpha) = \sin(\alpha)$
$\tan(90 - \alpha) = \cot(\alpha)$	$\tan(90 + \alpha) = -\cot(\alpha)$	$\tan(270 - \alpha) = \cot(\alpha)$	$\tan(270 + \alpha) = -\cot(\alpha)$

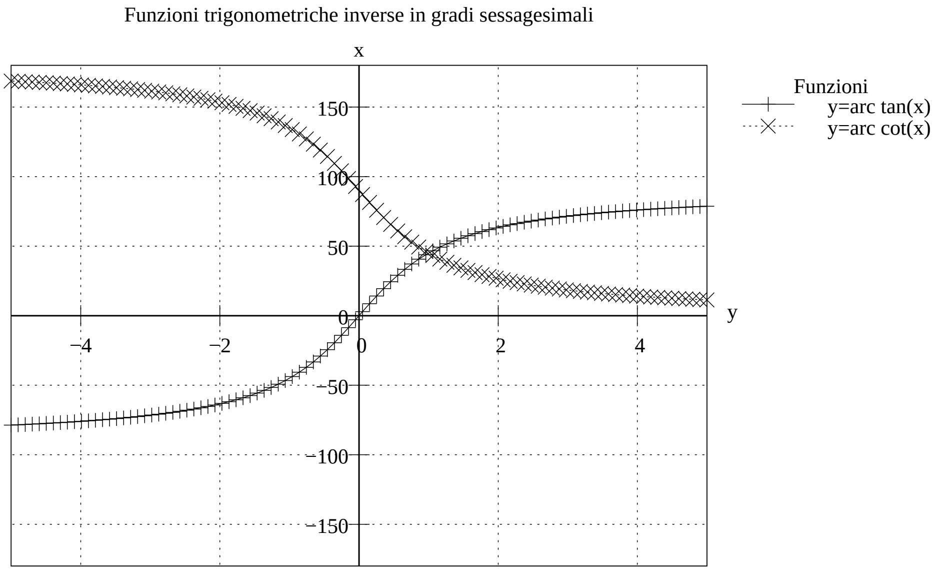
Le funzioni trigonometriche inverse

Per trovare un rapporto tra i lati conoscendo l'angolo... Non ci dovrebbero essere problemi ora. Le funzioni trigonometriche inverse invece permettono di trovare l'angolo conoscendo il raporto tra i lati.

Se si tenta però di invertire graficamente (tramite asse di simmetria) il seno e il coseno si noterà che le inverse non sono più funzioni. Si può aggirare questo problema riducendo l'insieme del dominio di queste funzioni a $\mathcal{D}_f = [-1; 1]$. Si ottengono allora i seguenti grafici.



Per le funzioni tangente e cotangente invece non si sono particolari problemi di dominio. Ecco i relativi grafici.



Una ricapitolazione degli insiemi di dominio e delle immagini nella sottostante tabella

Funzione	Dominio $\mathcal{D}_f$	Immagini $\mathcal{I}_f$
$y=\sin(x)$	$]-\infty;+\infty[$	$[-1;1]$
$y=\cos(x)$	$]-\infty;+\infty[$	$[-1;1]$
$y=\tan(x)$	$\mathbb{R}\vert k\cdot 180+90, k\epsilon\mathbb{Z}$	$]-\infty;+\infty[$
$y=\cot(x)$	$\mathbb{R}\vert k\cdot 180, k\epsilon\mathbb{Z}$	$]-\infty;+\infty[$
$y=\arcsin(x)$	$[-1;1]$	$[-90;90]$
$y=\arccos(x)$	$[-1;1]$	$[0;180]$
$y=\arctan(x)$	$]-\infty;+\infty[$	$[-90;90]$
$y=\text{arc}\cot(x)$	$]-\infty;+\infty[$	$[0;180]$

Esercizi

Semplifica le seguenti espressioni senza l'uso della calcolatrice:

$4\cos(180)+4\sin(90)+3\sin(180)=[0]$

$3\cos(90)-3\cos(0)+5\cos(180)=[-8]$

$\tan(540)-3\sin(270)+\cot(90)=[3]$

$\cos(270)-3\sin(180)+4\tan(180)=[0]$

$5\cos(0)-4(\sin(90)+3\cos(180))=[13]$

$\sin(\frac{3}{2}\pi)-2\cos(\pi)+\tan(2\pi)=[1]$

$3\cos\frac{\pi}{2}-2\sin\frac{3}{2}\pi+\frac{3}{2}\tan 0=[2]$

$2\sin\frac{\pi}{2}-4(\sin\pi-4\cos\pi)+\cos\frac{3}{2}\pi-2\sin 2\pi=[-14]$

$(a^2-b^2)\cos\frac{3}{2}\pi+\frac{2ab}{\cos 16\pi}-\frac{a^2+b^2}{\sin\frac{3}{2}\pi}=[(a+b)^2]$

$m^2\sin\frac{3}{2}\pi-(m-n)^2\sin\frac{7}{2}\pi+\frac{2mn}{\sin\frac{\pi}{2}}=[n^2]$